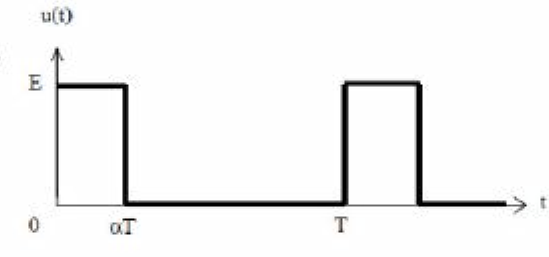


EXERCICE 1: Tension rectangulaire



u(t) est une tension de période T et de rapport cyclique α.

1. Calculer la valeur moyenne <u> et la valeur efficace U_{eff} de la tension u.

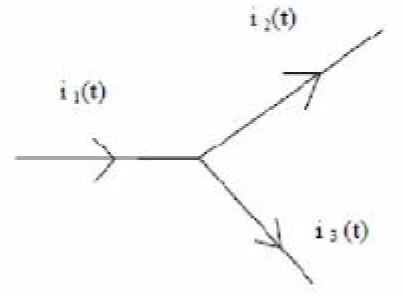
Avec les valeurs numériques ci-dessous.

2. Calculer la valeur efficace U_{ACeff} de la composante alternative.
3. Vérifier que $U_{eff}^2 = <u>^2 + U_{ACeff}^2$

A.N. E = 5V ; α = 0,5.



EXERCICE 2: Régime sinusoïdal

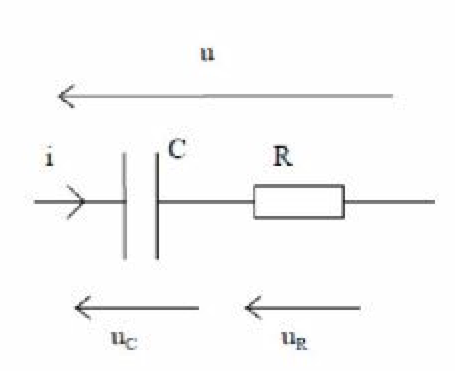


$i_1(t) = 4\sqrt{2}\cos\ (\omega t - \frac{\pi}{3})$; $i_2(t) = 2\sqrt{2}\cos\ (\omega t - \frac{5\pi}{6})$

1. Déterminer $i_3(t)$ par la méthode des vecteurs de Fresnel et par la méthode des nombres complexes.
2. Calculer $\varphi_{i1/i2}$, $\varphi_{i2/i3}$ et $\varphi_{i1/i3}$.



EXERCICE 3: Régime sinusoïdal



Représentation de Fresnel :

1. Construire $\vec{U}_R,\ \vec{U}_C\ et\ \vec{U}$
2. En déduire l'expression de Z_{eq} ainsi que l'expression du déphasage φ de *u* par rapport à *i*.
3. Applications numériques

On donne U = 5 V, f = 10 kHz, R = 1 kΩ et C = 10 nF.

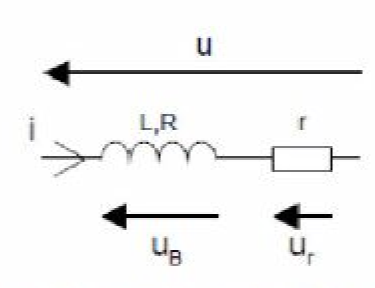
Calculer I, φ, U_R et U_C.

Comparer U et $U_R + U_C$. Commentaires ?

4. Pour quelle fréquence a-t-on $U_C = U_R$?



EXERCICE 4: Régime sinusoïdal



Une bobine réelle est équivalente à une résistance *R* en série avec une inductance L.

On la branche en série avec une résistance $r = 8\ \Omega$.

On donne $f = 50\ Hz,\ U = 14\ V,\ U_B = 8\ V\ et\ U_r = 8V.$

1. Calculer *I*.
2. Construction de Fresnel :

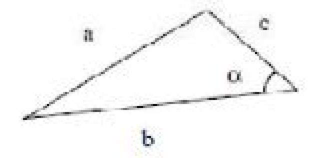
a. Construire $\vec{U}_r,\ \vec{U}_B\ et\ \vec{U}$

b. Calculer $\varphi_{u/i}$ et $\varphi_{u_B/i}$

c. A partir de $\vec{U}_B$ construire $\vec{U}_R$ et $\vec{U}_L$

d. En déduire *R* et *L*.

Rappel : dans un triangle quelconque :



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$



EXERCICE 5: Régime sinusoïdal

Déterminer $\mathbf{Y}_{eq}$.

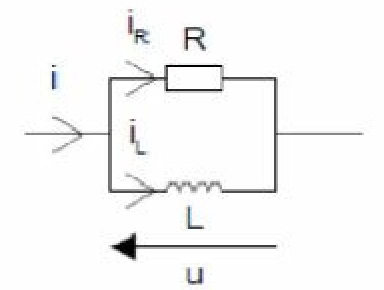
En déduire Y_{eq} et $\varphi_{u/i}$.

Applications numériques

On donne *U = 2 V, f = 15 kHz, R = 4,7 kΩ et L = 65 mH.*

Calculer I_R, I_L, I, $\varphi_{u/i}$, $\varphi_{iL/i}$ et $\varphi_{i/iR}$.

Pour quelle fréquence a-t-on $\varphi_{u/i} = 45°$?





EXERCICE 6: Régime sinusoïdal

Déterminer **Z**eq.

En déduire Zeq et $\varphi_{u/i}$.

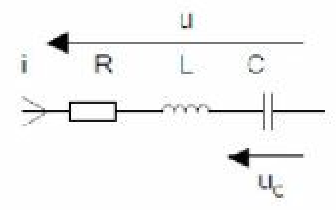
Quand *u* et *i* sont en phase on dit qu'il y a *résonance*.

Que vaut alors **Z**eq ?

A quelle pulsation ω_0 a lieu la résonance ?

$Q = \frac{U_C}{U}$ est appelé coefficient de surtension.

Montrer qu'à la résonance $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$

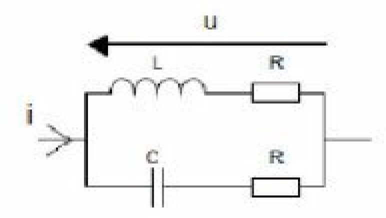




EXERCICE 7: Régime sinusoïdal

Déterminer **Z**eq.

Si $LC\omega^2 = 1$ que vaut le déphasage entre u et i ?

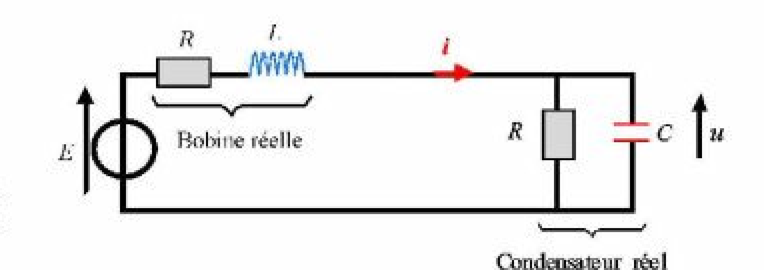




EXERCICE 8: Bobine réelle en série avec un condensateur réel

Le montage ci-dessous modélise une bobine réelle (L, R) en série avec un condensateur réel (C, R) initialement déchargé. On a la propriété :

$$\tau = \frac{L}{R} = RC.$$



1- Déterminer l'évolution de la tension u(t) aux bornes du condensateur lorsque le circuit est branché, à t=0, sur un générateur de tension E

2- Peut-on prévoir le régime permanent sans calcul ? Si oui, déterminer U, tension aux bornes du condensateur, et I, courant dans la bobine, en régime permanent.

TD : REPONSES

Bonne chance

EXERCICE 1 :

1 — Calcule de la valeur moyenne $\langle u \rangle$ et U_{eff} de la tension u

$\langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\alpha T} E\,dt + \int_{\alpha T}^{T} 0\,dt\right) = \frac{1}{T}\left(Et\right)_0^{\alpha T}$

$= \alpha E = 2.5V$ $\boxed{\langle u \rangle = 2.5V}$

d'après le cours on a : $U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$

donc $\langle u^2 \rangle = \frac{1}{T}\cdot\int_0^{\alpha T} u^2(t)\,dt = \frac{1}{T}E^2\alpha T = \alpha E^2$

$\Rightarrow U_{eff} = \sqrt{\alpha}\cdot E = 3,536V = 3.536V$ $\boxed{U_{eff} = 3.536V}$

2 — La valeur efficace de la composante alternative est :

on a : $u(t) = \langle u \rangle + u_{AC}(t) \Rightarrow u_{AC}(t) = u(t) - \langle u \rangle$

Pour $0 < t < \alpha T$ $u(t) = 5V \Rightarrow u_{AC}(t) = 2.5V$

Pour $\alpha T < t < T$ $u(t) = 0V \Rightarrow u_{AC}(t) = -2.5V$

or $u^2_{ACeff} = \langle u^2_{AC} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} u^2_{AC}(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{\alpha T}^{T} u^2_{AC}(t)\,dt$

$= \frac{1}{T}\int_0^T u^2_{AC}(t)\,dt$ puisque

$= (2.5)^2 \Rightarrow \boxed{u_{ACeff} = 2.5\ V}$

IL est clair que $U^2_{eff} = \langle u \rangle^2 + u^2_{ACeff}$

EXERCICE 2 :

- Méthode des nombres complexes :

on a : $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$, $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$\Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$ or $\underline{I}_1 = (I_{1eff}, \varphi_{i1}) = (4, -\frac{\pi}{3})$

et $\underline{I}_2 = (I_{2eff}, \varphi_{i2}) = (2, -\frac{5\pi}{6})$

$\Rightarrow \underline{I}_3 = (4, -\frac{\pi}{3}) - (2, -\frac{5\pi}{6}) = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} - 2e^{-j\frac{5\pi}{6}}$

EXERCICE 2 : (SUITE)

$$I_3 = 4e^{-j\pi/3} - 2e^{-j5\pi/6} = (2 - 2\sqrt{3}j) - (-\sqrt{3} - j)$$

$$= 2 + \sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})j = (4.472, -\underbrace{0.584}_{rad})$$

$$i_3(t) = 4.472\sqrt{2}\sin(\omega t - 0.584)$$

$i_3(t)$ par la méthode de Fresnel est :

selon la représentation graphique on a :

O — axe d'origine des phases

φ_{i_3}, φ_{i_1}, φ_{i_2} $-\frac{5\pi}{6}$, $\vec{I_2}$, $\vec{I_1}$, $\vec{I_3}$

d'après le graphe on a : $I_3 \simeq 4.5A$

$\varphi_{i_3} = -33° \simeq -0.58 rad$, d'où $i_3(t) \simeq \dots 2$

$$i_3(t) \simeq +4.5\sqrt{2}\sin(\omega t - 0.58)$$

2 — $\varphi_{i_1/i_2} = -\frac{\pi}{3} - (-5\pi/6) = \pi/2$: i_1 est quadrature avance sur i_2

$$\varphi_{i_2}/\varphi_{i_3} = -5\pi/6 - (-0.584) = -2.034 rad = -116°$$

$$\varphi_{i_1}/\varphi_{i_3} = -\pi/3 - (-0.584) = -0.463 rad = -26°$$

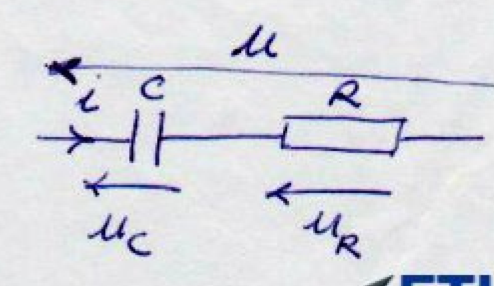
$$26° \cdot \frac{\pi rad}{180°} = 0.463 rad$$

$$0.463 \cdot \frac{180°}{\pi rad} = 26°$$

EXERCICE 3 :

Représentation de Fresnel :

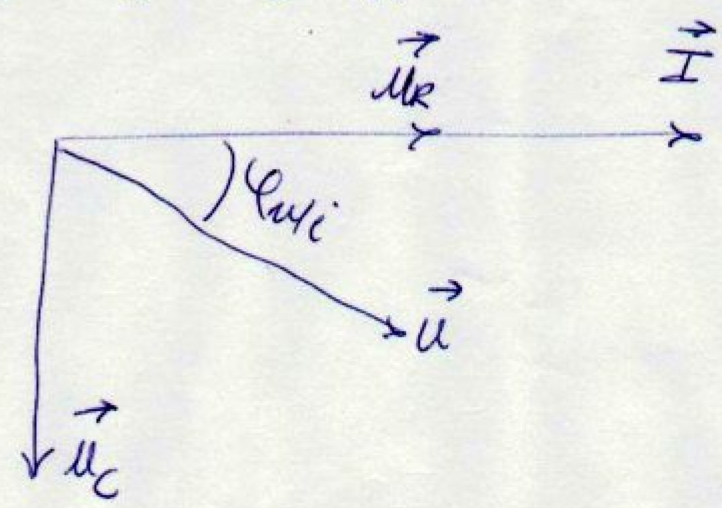
Construction de $\vec{u_R}$, $\vec{u_C}$ et $\vec{u}$





EXERCICE 3 (suite)

1- On a : $\vec{u} = \vec{u}_C + \vec{u}_R$



Par définition $\underline{u} = \underline{Z}_{eq}\,\underline{I}$; $\underline{u}_R = R\underline{I}$, $\underline{I} = jC\omega \underline{u}_C$

$\Rightarrow \underline{Z}_R = R$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$

$\underline{Z}_R = (R, 0°)$, $\underline{Z}_C = (\frac{1}{C\omega}, -\pi/2)$

2- $U_R = RI$ et $U_C = \frac{1}{C\omega}$ D'où : $Z_{eq}^2 = \frac{U^2}{I^2}$

$Z_{eq}^2 = \frac{U^2}{I^2} = R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2$ Finalement :

$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C\omega^2}}$ soit : $\varphi = -\,\mathrm{artg}\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

3- Loi d'ohm : $I = \frac{U}{Z_{eq}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 2.66\,mA$

$\varphi = -\,\mathrm{artg}(1/RC\omega)$

$U_R = RI = 2.66\,V$

$U_C = \frac{I}{C\omega} = 4.23\,V$

On remarque que $U \neq U_R + U_C$

les valeurs efficaces ne s'additionnent pas (sauf cas particulier)

Exercice 3 (suite)

$U_R = V_C \Rightarrow RI = \frac{I}{C\omega}$ soit : $RC\omega = 1$

$f = \frac{1}{2\pi RC} = 15.9$ KHz.

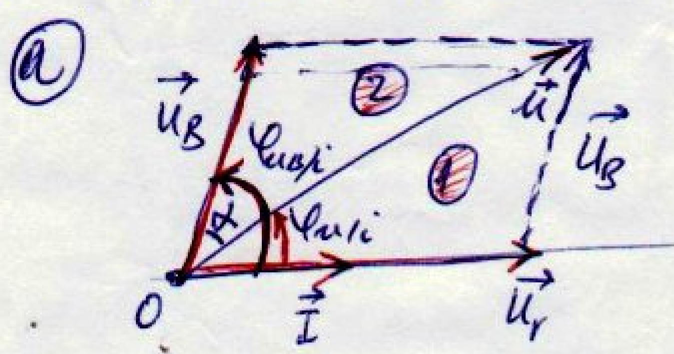
EXERCICE 4 :

1- Pour calculer le courant I, on applique tout simplement la loi d'Ohm : $U_r = rI$

A.N. $I = 1A$

2- Construction de Fresnel.

(a)



Dans le triangle délimité par les trois vecteurs :

(1) $u_B^2 = u_r^2 + u^2 - 2u_B U \cos\varphi_{u/i}$

(b) $\cos\varphi_{u/i} = \frac{u^2 + u_r^2 - u_B^2}{2UU_r} = 0.875$, $\varphi_{u/i}$ (rad) $= \arccos 0.875$

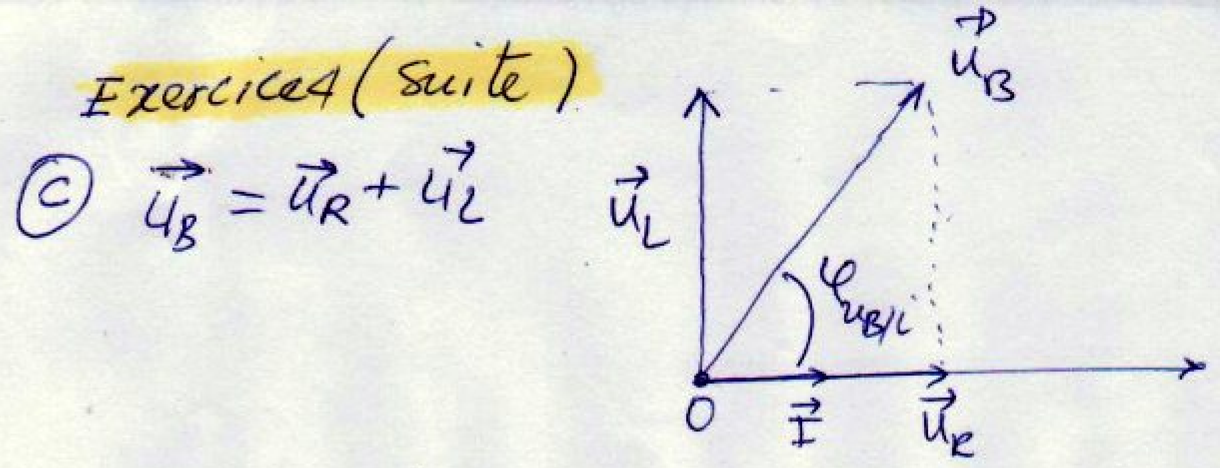
$\varphi_{u/i} \simeq 29°$

Pour calculer $\varphi_{uB/i}$ on suit les mêmes démarches

(2) $u_r^2 = u_B^2 + u^2 - 2u_B U \cos\alpha$ tel que $\alpha + \varphi_{u/i} = \varphi_{uB/i}$

$\alpha \simeq 29° \Rightarrow \varphi_{uB/i} = 58°$

Exercice4 (suite)



(c) $\vec{u}_B = \vec{u}_R + \vec{u}_L$

$$\cos \varphi_{u_B/i} = \frac{u_R}{u_B} \Rightarrow u_R = u_B \cos \varphi_{u_B/i} = 4.25\,V$$

$$\Rightarrow R = \frac{u_R}{I} = 4.25\,\Omega$$

$$u_L = u_B \sin \varphi_{u_B/i} = 6.78\,V$$

$$L = \frac{u_L}{\omega I} = 21.6\,mH$$

Exercice 5:

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega} \qquad Y_{eq} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

$$\varphi_{u/i} = -\arg \underline{Y} = -\operatorname{arctg} \frac{-\frac{1}{L\omega}}{1/R} = \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{L\omega}\right)$$

Applications numériques:

$$I_R = U/R = 0.43\,mA \quad , \quad I_L = \frac{U}{L\omega} = 0.33\,mA$$

$$I = Y_{eq} U = 0.54\,mA$$

$$\varphi_{u/i} = +37^\circ$$

$$\varphi_{i_L/i} = \varphi_{i_L/u} + \varphi_{u/i} = -90^\circ + 37 = -53^\circ$$

$$\varphi_{i_R/i} = \varphi_{i/u} = -37^\circ \quad , \quad tg\,\varphi_{u/i} = \frac{R}{L\omega}$$

si $\varphi_{u/i} = 45^\circ$ alors $\frac{R}{L\omega} = 1$

soit $f = \frac{R}{2\pi L} = 11.5\,KHz$.



Exercice 5 :

6

- Calcule de l'admitance équivalente :

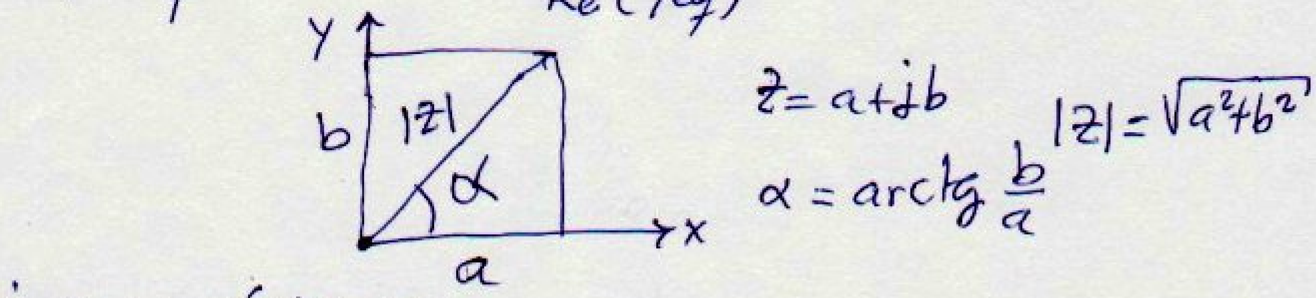
$$\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_R + \bar{Y}_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$$

Le module de $\bar{Y}_{eq}$ est : $Y_{eq} = \sqrt{1/R^2 + 1/(L\omega)^2}$

$\varphi_{u/i} = ?$ on a : $\varphi_{u/i} = \text{arctg} \dfrac{Im(\bar{Z}_{eq})}{Re(\bar{Z}_{eq})}$; $\arg \bar{Z}_{eq} = \varphi_{u/i}$

$\arg(\bar{Z}_{eq}) = \arg\left(\dfrac{1}{\bar{Y}_{eq}}\right) = \varphi_{u/i} = -\arg(\bar{Y}_{eq})$ d'où $\arg \bar{Y}_{eq} = -\varphi_{u/i}$

$$\varphi_{u/i} = -\arg \bar{Y}_{eq} = -\text{arctg}\frac{Im(\bar{Y}_{eq})}{Re(\bar{Y}_{eq})} = \text{arctg}\frac{R}{L\omega}$$



Applications numériques :

* $I_R = \dfrac{U}{R} = 0.43\ mA$; $I_L = \dfrac{U}{L\omega} = 0.33\ mA$

* $U = \dfrac{1}{Y_{eq}} I \Rightarrow I = Y_{eq} U = 0.54\ mA$

* $\varphi_{u/i} = \text{arctg}\dfrac{R}{L\omega} = 37°$ $(\omega = 2\pi f)$

* $\varphi_{iL/i} = \varphi_{iL/u} + \varphi_{u/i} = -90° + 37° = -53°$

  $U = jL\omega I_L \Rightarrow I_L = \dfrac{-j}{L\omega} U = \dfrac{1}{L\omega} e^{-\pi/2} U$

* $\varphi_{i/i_R} = \varphi_{i/u} + \underbrace{\varphi_{u/i_R}}_{0} = -\varphi_{u/i} = -37°$

* cherchons la fréquence f tel que $\varphi_{u/i} = 45°$

$\text{tg}\,\varphi_{u/i} = \dfrac{R}{L\omega} = \dfrac{R}{L 2\pi f}$; si $\varphi_{u/i} = 45°$ alors $\dfrac{R}{L\omega} = 1$

soit : $f = \dfrac{R}{2\pi L} = 11.5\ KHz$

Exercice 6 :

$\bar{Z}_{eq}$? $\quad \bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$

$= R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

Déduisons Z_{eq} et $\varphi_{u/i}$

tout simplement : $Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$.

$\operatorname{tg} \varphi_{u/i} = \frac{Im(\bar{Z}_{eq})}{Re(\bar{Z}_{eq})} = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$ $\quad$ $\boxed{\arg(\bar{Z}_{eq}) = \varphi_{u/i}}$

$\Rightarrow \varphi_{u/i} = \operatorname{arctg} \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$.

* lorsqu'il y a résonance, u et i sont en phase ($\varphi_{u/i} = 0$)

$\varphi_{u/i} = 0 = \operatorname{arctg} \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$

or $\bar{Z}_{eq} = R + j\underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}_{0} = R$; $\boxed{\bar{Z}_{eq} = R}$

* s'il y a résonance $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$

$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

* Coefficient de surtension à la résonance $Q = \frac{U_C}{U}$.

$U = Z_{eq} I$ et $U_C = \frac{I}{C\omega}$ alors $\frac{U_C}{U} = \frac{1}{C\omega R}$ $\quad$ ($Z_{eq} = R$ ← résonance)

$Q = \frac{1}{RC\omega_0}$

A.N. $\omega_0 = 10^5 \text{ rad/s}$; $Q_0 = 22.7$; $U_{C0} = 114\text{ V}$

Exercice 7

$$\bar{Z}_{eq} = (\bar{Z}_L + \bar{Z}_R) // (\bar{Z}_C + \bar{Z}_R)$$

$$= (jL\omega + R) // (\frac{1}{jC\omega} + R) = \frac{(jL\omega + R)(\frac{1}{jC\omega} + R)}{2R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$= \frac{R^2 + jR(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + \frac{L}{C}}{2R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

si $L\omega^2 C = 1$ $\varphi_{u/i} = ?$

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R}$$ est purement réelle pas de partie imaginaire

$$tg\,\varphi_{u/i} = \frac{Im(\bar{Z}_{eq})}{Re(\bar{Z}_{eq})} = 0 \Rightarrow \varphi_{u/i} = 0°$$

donc u et i sont en phase.

Exercice 8 :

* Evolution de la tension u(t) aux bornes du condensateur :

La loi des noeuds donne :

$$i = i_R + i_C = \frac{u}{R} + C\frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

la loi des mailles donne :

$$E = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} + u \quad (2)$$

En reportant (1) dans (2)

$$E = \left(RC\frac{\partial u}{\partial t} + u\right) + \frac{L}{R}\left(RC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) + u$$

$$= \tau^2 \frac{d^2 u}{\partial t^2} + 2\tau \frac{du}{dt} + 2u$$

soit: $$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2}u = \frac{E}{\tau^2}$$

la solution particulière constante est

$$u_2(t) = E/2$$

L'équation sans second membre s'écrit

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{2}{\tau^2}u = 0$$

polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \frac{2}{\tau^2} = 0$

$$\Delta = -\frac{4}{\tau^2} < 0$$

le polynôme admet deux racines complexes conjuguées : $r = -\frac{1}{\tau} \pm j\frac{1}{\tau}$

En régime pseudo-périodique, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = \frac{E}{2} + e^{-t/\tau}\left(A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(t/\tau\right)\right)$$

On applique les conditions initiales pour déterminer A et B

$u(0) = 0 = A + \frac{E}{2} = 0$ d'où : $A = -\frac{E}{2}$.

$$\frac{d(u(0))}{dt} = \frac{1}{C}\left(i(0) - \frac{u(0)}{R}\right) = 0 \Rightarrow \frac{B}{\tau} - \frac{A}{\tau} = 0 \text{ d'où } B = A = -\frac{E}{2}$$

La loi d'évolution de la tension u s'écrit donc :

$$u(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\left(\cos(t/\tau) + \sin(t/\tau)\right)\right)$$

2- En régime permanent, la tension u aux bornes du condensateur et l'intensité i dans la bobine sont constantes.

$$u = U \quad \text{et} \quad i = I$$

le condensateur se comporte alors comme un interrupteur et la bobine comme un fil.
le montage est équivalent au shéma simple ci-dessous

R $i = I$

E

R $u = U$

la loi des mailles donne immédiatement

$$I = \frac{E}{2R} \quad \text{d'où :} \quad U = \frac{E}{2}.$$




ETUSUP.com